

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ
ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра «Радиоэлектроника»

На правах рукописи

МОДЕЛИРОВАНИЕ УЗКОПОЛОСНЫХ СИГНАЛОВ В АНТЕННАХ
С АДАПТИВНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ ТЕХНОЛОГИЕЙ ОБРАБОТКИ
СИГНАЛОВ

Методические указания

Ростов-на-Дону
ДГТУ
2018

УДК 62

Составители: Д.Д. Габриэльян, Ю.А. Шокова

Моделирование узкополосных сигналов в антеннах
с адаптивной динамической технологией обработки сигналов:
метод. указания. – Ростов-на-Дону: Донской гос. техн. ун-т, 2018.
– 30 с.

Приводятся методические указания по выполнению лабораторной ра-
боты по дисциплине «Адаптивная динамическая технология обработки сигнала-
лов».

Предназначены для обучающихся направления подготовки 11.04.02 Ин-
фокоммуникационные технологии и системы связи, программа «Беспровод-
ные инфокоммуникационные сети» всех форм обучения.

УДК 62

Печатается по решению редакционно-издательского совета
Донского государственного технического университета

Научный редактор канд. техн. наук, доцент О.Ю. Назарова

Ответственный за выпуск зав. кафедрой «Радиоэлектроника» д-р физ.-
мат. наук, доцент Ю.А. Шокова

В печать _____.20__ г.
Формат 60×84/16. Объем ____ усл.п.л.
Тираж ____ экз. Заказ № ____.

Издательский центр ДГТУ
Адрес университета и полиграфического предприятия:
344000, г. Ростов-на-Дону, пл. Гагарина, 1

© Донской государственный
технический университет,
2019

Цель работы

Привитие навыков аналитического и численного моделирования узкополосных сигналов для изучения адаптивной динамической технологии сигналов в антеннах как составной части современных тенденций развития вычислительных и информационных технологий.

Теоретическая часть

1 Детерминированные периодические сигналы

1.1 Гармонические и полигармонические сигналы

К классу периодических сигналов относятся, прежде всего, гармонические и полигармонические сигналы. Для периодических сигналов выполняется общее условие $s(t) = s(t + kT)$, где $k = 1, 2, 3, \dots$ - любое целое число (из множества целых чисел от $-\infty$ до ∞), T - период, являющийся конечным отрезком независимой переменной. Это условие является характерным признаком периодического сигнала.

Гармонические сигналы (синусоидальные), описываются следующими формулами:

$$s(t) = A \sin(2\pi f_0 t + j) = A \sin(\omega_0 t + j), \quad s(t) = A \cos(\omega_0 t + j), \quad (1)$$

где A , f_0 , ω_0 , j - постоянные величины, которые могут исполнять роль информационных параметров сигнала: A - амплитуда сигнала, f_0 - циклическая частота в герцах, $\omega_0 = 2\pi f_0$ - угловая частота в радианах, j - начальный (при $t = 0$) фазовый угол в радианах. Период одного колебания и частота колебания связаны следующим соотношением $T = 1/f_0 = 2\pi/\omega_0$. Частотный спектр сигнала представлен амплитудным значением частоты f_0 и начальным фазовым углом. Гармонические сигналы часто используются в качестве тестовых сигналов при исследовании и измерении характеристик различных радиотехнических устройств и элементов.

Полигармонические сигналы составляют наиболее широко распространенную группу периодических сигналов и описываются суммой гармонических колебаний:

$$s(t) = \sum_{m=0}^{M} A_m \cos(2\pi f_m t + j_m), \quad (2)$$

где M - число гармонических сигналов, составляющих полигармонический сигнал, каждый из которых характеризуется своей амплитудой A_m частотой $f_m = m f_0$ и начальной фазой j_m .

Полигармонический сигнал можно задать непосредственно функцией $s(t) = s(t + kT_0)$, где T_0 - период одного полного колебания сигнала $s(t)$,

заданного на одном периоде. Значение $f_0 = 1/T$ в данном случае называют фундаментальной (основной) частотой колебаний или первой гармоникой. Гармонические колебания с кратными частотами $2f_0, 3f_0, \dots$ называются высшими гармониками колебания $s(t)$.

Как следует из (2) полигармонические сигналы представляют собой сумму определенной постоянной составляющей ($m = 0, f_0 = 0$) и произвольного (в пределе бесконечного) числа гармонических составляющих с произвольными значениями амплитуд и фаз, с частотами, кратными фундаментальной частоте f_0 . Другими словами, на периоде фундаментальной частоты f_0 укладывается кратное число периодов всех гармоник, что и создает периодичность повторения сигнала. Частотный спектр полигармонических сигналов дискретен, поэтому второе распространенное математическое представление сигналов - в виде спектров (рядов Фурье).

На рисунке 1,а приведен отрезок периодического сигнала, который представляет собой сумму постоянной составляющей и трех гармонических колебаний с разными значениями частоты и начальной фазы колебаний.

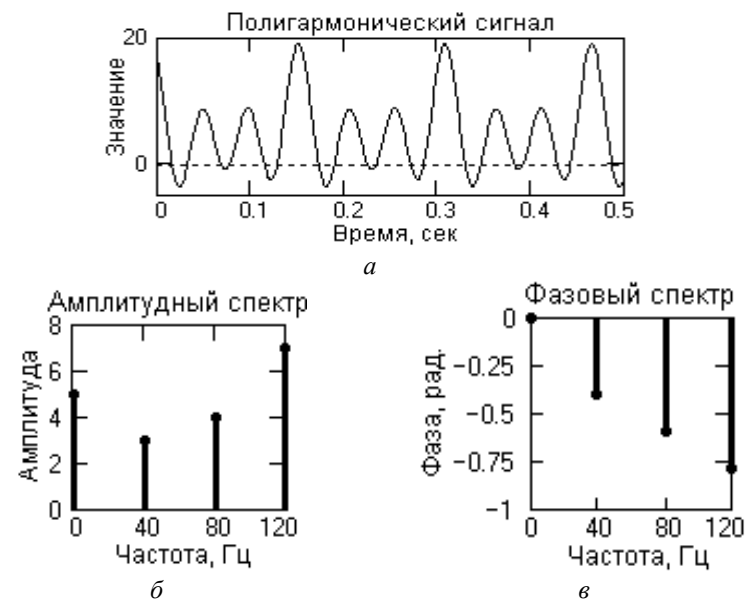


Рисунок 1 - Полигармонический сигнал:
а - представление сигнала; б - амплитудный спектр сигнала; в - фазовый спектр сигнала

Математическое описание сигнала задается формулой:

$$s(t) = \sum_{m=0}^3 A_m \cos(2\pi f_m t + j_m),$$

где $A_m = \{5, 3, 4, 7\}$ - амплитуда гармоник; $f_m = \{0, 40, 80, 120\}$ - частота [Гц]; $j_m = \{0, -0,4, -0,6, -0,8\}$ - начальный фазовый угол колебаний в радианах; $m = 0, 1, 2, 3$.

Фундаментальная частота сигнала 40 Гц. Частотное представление данного сигнала (спектр сигнала) приведено на рисунках 1,б,в. Обратим внимание, что частотное представление периодического сигнала $s(t)$, ограниченного по числу гармоник спектра, составляет всего восемь отсчетов и весьма компактно по сравнению с временным представлением.

1.2 Представление периодических сигналов рядом Фурье

Периодический сигнал любой произвольной формы может быть представлен в виде суммы гармонических колебаний с частотами, кратными фундаментальной частоте колебаний f_0 . Для этого достаточно разложить один период сигнала T в ряд Фурье по тригонометрическим функциям синуса и косинуса с шагом по частоте, равным фундаментальной частоте колебаний f_0 :

$$\begin{aligned} s(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(2\pi k f_0 t) + b_k \sin(2\pi k f_0 t)] = \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [A_k \cos(2\pi k f_0 t + j_k)] \end{aligned} \quad (3)$$

где

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) \cos(2\pi k f_0 t) dt, \quad b_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) \sin(2\pi k f_0 t) dt, \quad (4)$$

$$A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}, \quad j_k = -\arctg \frac{b_k}{a_k}. \quad (5)$$

Ряд (3), известный как тригонометрический ряд Фурье, представляет колебание $s(t)$ в виде суммы постоянной составляющей $a_0/2$ и гармонических колебаний: косинусоидальных и синусоидальных с амплитудами a_k и b_k , либо только косинусоидальных с амплитудами A_k и начальными фазами j_k . Константа a_0 рассчитывается по общей формуле для a_k . Ради этой общности и введена несколько странная на первый взгляд форма записи постоянного слагаемого (с делением на два). Само же это слагаемое представляет собой среднее значение сигнала на периоде:

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) dt.$$

Пределы интегрирования в (4.4) не обязательно должны быть такими, как в приведенных формулах (от $-T/2$ до $T/2$). Интегрирование может производиться по любому интервалу длиной T - результат от этого не изменится. Конкретные пределы выбираются из соображений удобства вычислений; например, может оказаться удобнее выполнять интегрирование от 0 до T или от $-T$ до 0.

Если $s(t)$ является четной функцией, то все b_k будут равны нулю и в формуле ряда Фурье будут присутствовать только косинусные слагаемые, фазы которых j_k могут принимать только значения 0 и π . Если $s(t)$ является нечетной функцией, равны нулю будут, наоборот, косинусные коэффициенты a_k и в формуле останутся лишь синусные слагаемые и возможные значения их фаз равны $\pm \pi/2$.

Представление сигналов амплитудами A_k и начальными фазами j_k называется вещественной формой представления ряда Фурье. Часто применяют и его комплексное представление. Комплексная форма получается из вещественной представлением косинуса в виде полусуммы комплексных экспонент (такое представление вытекает из формулы Эйлера $\exp(\pm jx) = \cos x \pm j \sin x$ и соответственно $\cos x = \frac{1}{2}(\exp(jx) + \exp(-jx))$).

Применив данное преобразование к вещественной форме ряда Фурье, получим суммы комплексных экспонент с положительными и отрицательными показателями:

$$s(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_k}{2} [\exp(jk\omega_0 t + j j_k) + \exp(-jk\omega_0 t - j j_k)]. \quad (6)$$

Будем трактовать экспоненты со знаком «минус» в показателе как члены ряда с отрицательными номерами. В рамках этого же общего подхода постоянное слагаемое $a_0/2$ станет членом ряда с нулевым номером. В результате получится комплексная форма записи ряда Фурье:

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} C_k \exp(-jk\omega_0 t). \quad (7)$$

Комплексные коэффициенты ряда связаны с амплитудами A_k и начальными фазами j_k , фигурирующими в вещественной форме записи ряда Фурье, следующими несложными соотношениями:

$C_k = 0.5A_k \exp(j\varphi_k)$, $A_k = 2|C_k|$, $\varphi_k = \arg(C_k)$, где $|C_k|$ - модуль C_k .

Несложно выглядят и формулы связи с коэффициентами a_k и b_k синусно-косинусной формы ряда Фурье:

$$C_k = \frac{a_k}{2} - j\frac{b_k}{2}, \quad C_{-k} = \frac{a_k}{2} + j\frac{b_k}{2}, \quad a_k = 2\operatorname{Re}(C_k), \quad b_k = -2\operatorname{Im}(C_k).$$

Отсюда сразу же следует и формула непосредственного расчета коэффициентов C_k ряда Фурье в комплексной форме:

$$C_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) \exp(-jk\omega_0 t) dt, \quad (8)$$

Если $s(t)$ является четной функцией, коэффициенты ряда C_k будут чисто вещественными, а если $s(t)$ - функция нечетная, коэффициенты ряда окажутся чисто мнимыми.

Совокупность амплитуд гармоник ряда Фурье часто называют амплитудным спектром, а совокупность их фаз - фазовым спектром сигнала. Эти понятия не следует путать с амплитудно- и фазочастотными характеристиками, которые относятся не к сигналам, а к операционным системам и цепям.

Если анализируемый сигнал $s(t)$ является вещественным, то его амплитудный и фазовый спектры обладают симметрией: $A_{-k} = A_k$, $\varphi_{-k} = -\varphi_k$, $C_{-k} = C_k^*$, где знак * обозначает комплексно сопряженное число.

Спектр периодического сигнала в соответствии с формулами (3), (6) состоит из бесконечной совокупности гармонических или комплексных экспоненциальных составляющих с кратными частотами $k\omega_0 = k2\pi f_0 = k(2\pi/T)$. Спектр является дискретным, так как частоты составляющих принимают дискретные значения: $0, \omega_0, 2\omega_0, 3\omega_0, \dots, k\omega_0 \dots$. Кратность частот составляющих - второй характерный признак множества периодических сигналов. Напомним, что первым признаком этого множества является выполнение условия $s(t) = s(t + kT)$, где $k = 1, 2, 3, \dots$ - любое целое число (из множества целых чисел от $-\infty$ до ∞).

Поскольку периодический сигнал известного периода T полностью описывается совокупностью амплитуд A_k и фаз φ_k своих составляющих, то задание спектра такого колебания сводится к заданию его спектров амплитуд и фаз. Для многих практических приложений достаточно знать лишь спектр амплитуд.

1.3 Последовательность прямоугольных импульсов

Рассмотрим представление периодических сигналов рядом Фурье на примере последовательности прямоугольных импульсов с амплитудой A , длительностью t и периодом повторения T . Начало отсчета времени примем расположенным в середине импульса, как показано на рисунке 2.

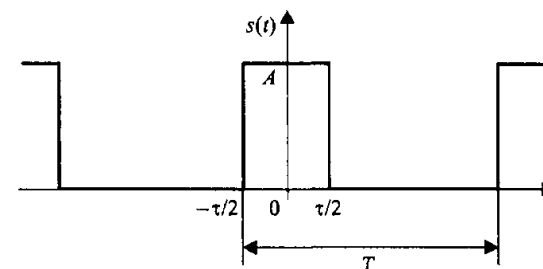


Рисунок 2 - Периодическая последовательность прямоугольных импульсов

Данный сигнал является четной функцией, поэтому для его представления удобнее использовать синусно-косинусную форму ряда Фурье - в ней будут присутствовать только косинусные слагаемые a_k , равные

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} A \cos \frac{2\pi k}{T} t dt = \frac{2A}{T} \int_{-t/2}^{t/2} \cos \frac{2\pi k}{T} t dt.$$

Анализ полученной формулы позволяет заметить, что длительность импульсов и период их следования входят в нее не обособленно, а исключительно в виде отношения. Этот параметр - отношение периода к длительности импульсов - называют скважностью последовательности импульсов и обозначают буквой q : $q = T/t$. Введем этот параметр в полученную формулу для коэффициентов ряда Фурье, а затем приведем формулу к виду $\sin x/x$:

$$a_k = \frac{2A}{T} \int_{-t/2}^{t/2} \cos \frac{2\pi k}{T} t dt = \frac{2A}{q} \frac{\sin \frac{2\pi k}{q} \frac{t}{2}}{\frac{2\pi k}{q} \frac{t}{2}}. \quad (9)$$

В зарубежной литературе вместо скважности используется обратная величина, называемая коэффициентом заполнения (*duty cycle*) и равная t/T .

При такой форме записи становится хорошо видно, чему равно значение постоянного слагаемого ряда: поскольку при $x \rightarrow 0$, $\sin x/x \rightarrow 1$, то

$$\frac{a_0}{2} = \frac{A}{q} = \frac{At}{T}.$$

Теперь можно записать и само представление последовательности прямоугольных импульсов в виде ряда Фурье:

$$s(t) = \frac{A}{q} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2A}{\pi k} \sin \frac{\pi k}{q} \cos \frac{2\pi k}{T} t \quad (10)$$

Амплитуды гармонических слагаемых ряда зависят от номера гармоники по закону $\sin x/x$, как показано на рисунке 3.

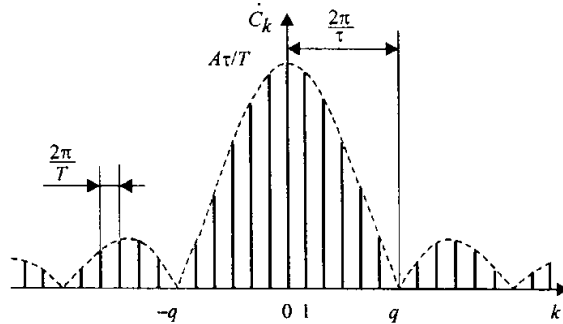


Рисунок 3 - Коэффициенты ряда Фурье для последовательности прямоугольных импульсов с $q=6$

График функции $\sin x/x$ имеет лепестковый характер. Говоря о ширине этих лепестков, следует подчеркнуть, что для графиков дискретных спектров периодических сигналов возможны два варианта градуировки горизонтальной оси - в номерах гармоник и в частотах. На рисунке 3 градуировка оси соответствует номерам гармоник, а частотные параметры спектра нанесены на график с помощью размерных линий. Таким образом, ширина лепестков, измеренная в количестве гармоник, равна скважности последовательности (при $k=nq$ имеем $\sin(nk/q) = 0$, если $n \neq 0$). Отсюда следует важное свойство спектра последовательности прямоугольных импульсов - в нем отсутствуют (имеют нулевые амплитуды) гармоники с номерами, кратными скважности.

Расстояние по частоте между соседними гармониками равно частоте следования импульсов - $2\pi/T$. Ширина лепестков спектра, измеренная в единицах частоты, равна $2\pi/t$, то есть обратно пропорциональна длительности импульсов. Это, как мы увидим далее, проявление общего закона - чем короче сигнал, тем шире его спектр.

Важным частным случаем предыдущего сигнала является меандр - последовательность прямоугольных импульсов со скважностью, равной двум, когда длительности импульсов и промежутков между ними становятся равными, как показано на рисунке 4.

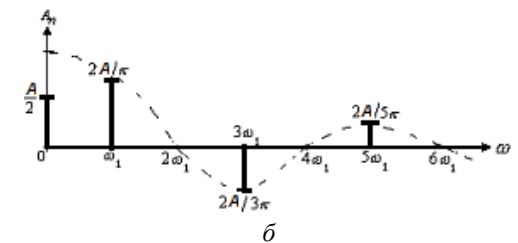
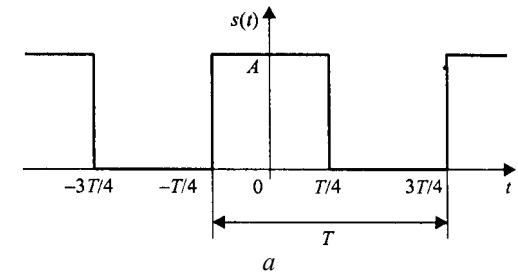


Рисунок 4 - Меандр и его спектр

Подставив $q=2$ в формулу (4.9), получим

$$a_k = \begin{cases} A, & k=0, \\ 0, & k=2m, m \neq 0 \\ \frac{2A}{\pi k}, & k=4m+1 \\ -\frac{2A}{\pi k}, & k=4m-1 \end{cases}$$

Здесь m - произвольное целое число.

Таким образом, в спектре меандра присутствуют только нечетные гармоники. Это согласуется с общим правилом, приведенным выше. Представление меандра в виде ряда Фурье с учетом этого может быть записано следующим образом:

$$s(t) = \frac{A}{2} + \frac{2A}{\pi} \cos \frac{\pi}{2} t - \frac{1}{3} \cos \frac{3\pi}{2} t + \frac{1}{5} \cos \frac{5\pi}{2} t - \dots$$

Гармонические составляющие, из которых складывается меандр, имеют амплитуды, обратно пропорциональные номерам гармоник, и чередующиеся знаки.

Покажем на примере меандра (рисунок 5), как складывается заданный сигнал из отдельных гармоник по мере их добавления в сигнал.

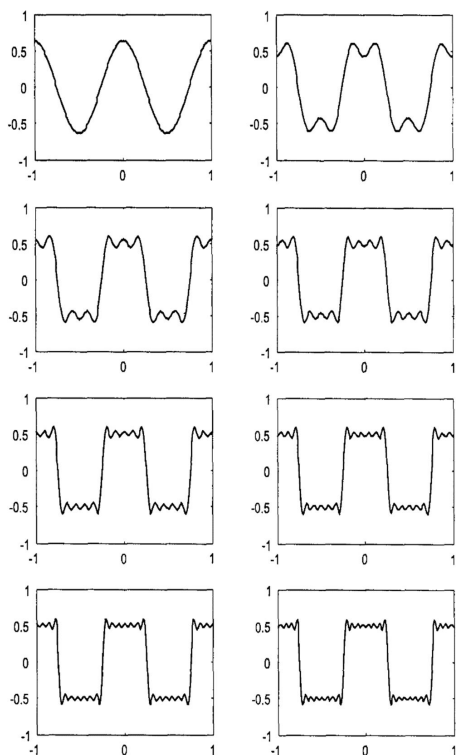


Рисунок 5 - Промежуточные стадии суммирования ряда Фурье для меандра

Вообще, последовательность прямоугольных импульсов плохо подходит для представления рядом Фурье - она содержит скачки, а сумма любого числа гармонических составляющих с любыми амплитудами всегда будет непрерывной функцией. Поэтому поведение ряда Фурье в окрестностях разрывов представляет особый интерес. На графиках рис. 4.6 хорошо видно, что в окрестности точки разрыва суммирование ряда Фурье дает наклонный участок, причем крутизна наклона возрастает с ростом числа суммируемых гармоник. В самой точке разрыва ряд Фурье сходится к полусумме правого и левого пределов:

$$s(t) = \frac{1}{2} \lim_{t \rightarrow t_0-0} s(t) + \lim_{t \rightarrow t_0+0} s(t).$$

В последнем соотношении $s(t)$ — исходный сигнал, $s(t)$ — сумма ряда Фурье для него.

На примыкающих к разрыву участках сумма ряда Фурье дает заметные пульсации, причем на графиках рисунка 5 заметно, что амплитуда этих пульсаций не уменьшается с ростом числа суммируемых гармоник - пульсации

сигналов тождественно полигармоническим сигналам (сумма гармоник), а частотный спектр также дискретен.

Апериодические сигналы составляют основную группу непериодических сигналов и задаются произвольными функциями времени. На рисунке 7 показан пример аperiодического сигнала, заданного формулой на интервале $(0, \infty)$: $s(t) = \exp(-at) - \exp(-bt)$, где a и b – константы (данном случае $a = 0,15$, $b = 0,17$).

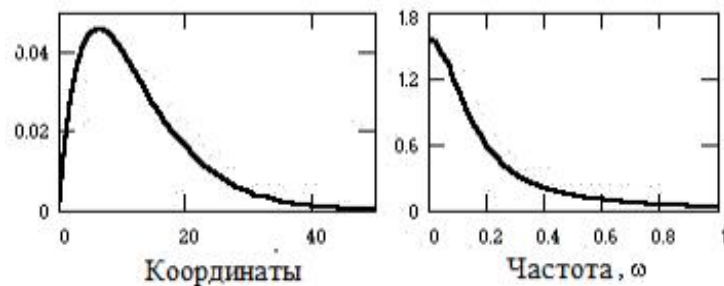


Рисунок 7 - Аperiодический сигнал и модуль спектра

К аperiодическим сигналам относятся также импульсные сигналы, которые в радиотехнике и в отраслях, широко ее использующих, часто рассматривают в виде отдельного класса сигналов. Импульсы представляют собой сигналы определенной и достаточно простой формы, существующие в пределах конечных временных интервалов. Сигнал, приведенный на рисунке 8, относится к числу импульсных.

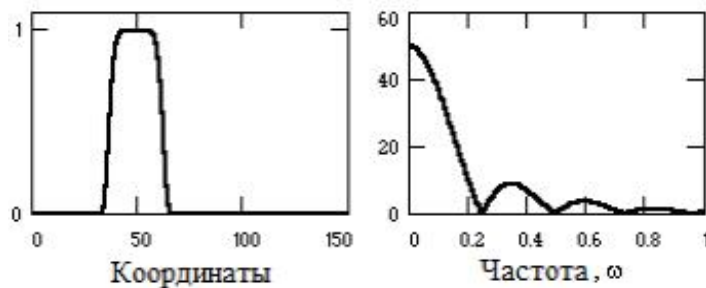


Рисунок 8 - Импульсный сигнал и модуль спектра

В классе импульсных сигналов выделяют подкласс радиоимпульсов. Пример радиоимпульса приведен на рисунке 9.

Уравнение радиоимпульса: $s(t) = u(t)\cos(2\pi f t + j)$, где $\cos(2\pi f t + j)$ – гармоническое колебание заполнения радиоимпульса с соответствующей

нулевым значением) и снова рассчитаем коэффициенты ряда Фурье. Формулы (4) и (7) для расчета коэффициентов ряда показывают, что нам придется вычислить те же самые интегралы, но для более тесно расположенных частот kf_0 и kW_0 . Изменение пределов интегрирования не играет роли - ведь на добавившемся между импульсами пространстве сигнал имеет нулевое значение. Единственное дополнительное изменение будет состоять в уменьшении общего уровня гармоник из-за деления результата интегрирования на увеличившийся период T .

На рисунке 10 описанные изменения иллюстрируются на примере двукратного увеличения периода следования прямоугольных импульсов. Несложно заметить, что горизонтальная ось спектральных графиков проградуирована в значениях частот ω , а не номеров гармоник. Следовательно, с ростом периода следования импульсов гармоники располагаются ближе друг к другу по частоте, а общий уровень спектральных составляющих становится все меньше. При этом вид вычисляемого интеграла (7) не меняется. Наконец, если устремить период к бесконечности (превратив тем самым периодическую последовательность в одиночный импульс), гармоники спектра будут плотно занимать всю частотную ось, а их амплитуды упадут до нуля (станут бесконечно малыми). Однако взаимное соотношение между уровнями гармоник остается неизменным и определяется все теми же интегралами (4) и (7). Поэтому при спектральном анализе непериодических сигналов для расчета коэффициентов вещественного и комплексного рядов Фурье формулы (3)-(7) модифицируются следующим образом:

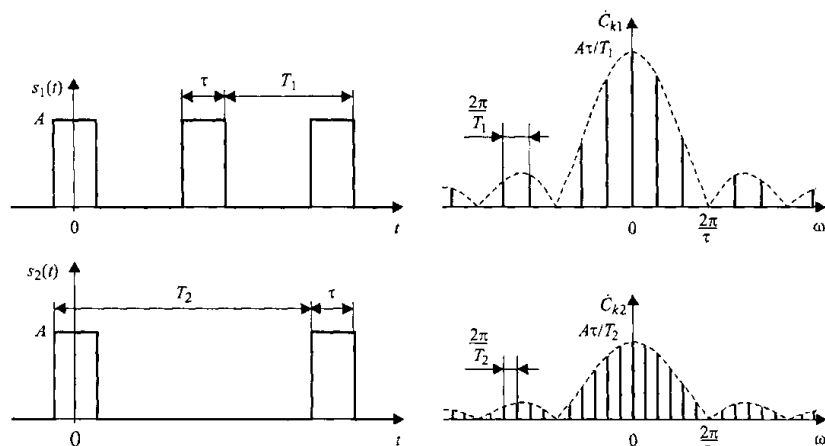


Рисунок 10 - Изменение спектра последовательности импульсов при двукратном увеличении периода их следования

2.3 Одиночный прямоугольный импульс

Рассмотрим пример расчета преобразования Фурье для одиночного прямоугольного импульса, центрированного относительно начала отсчета времени, как показано на рисунке 11.

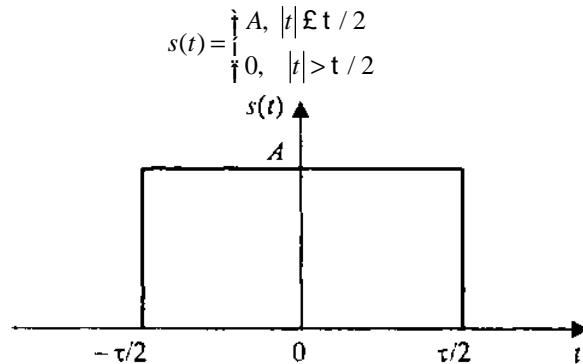


Рисунок 11 - Прямоугольный импульс

Вычисляем спектральную функцию:

$$S(\omega) = \int_{-\tau/2}^{\tau/2} A \exp(-j\omega t) dt = \frac{2A}{\omega} \sin \frac{\omega \tau}{2} = A\tau \frac{\sin(\omega \tau / 2)}{\omega \tau / 2}. \quad (18)$$

Как видно, спектр представляет собой функцию вида $\sin(x)/x$, показанный на рисунке 12.

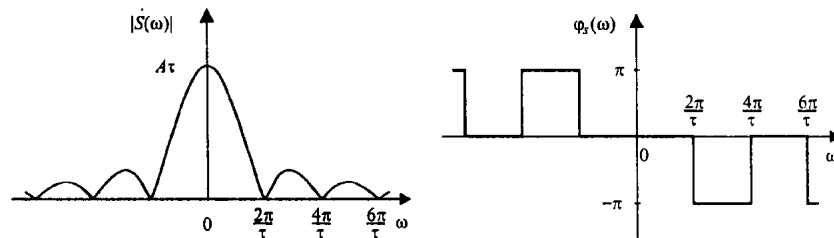


Рисунок 12 - Амплитудный (слева) и фазовый (справа) спектры прямоугольного импульса

Нули этой функции располагаются через интервалы $2\pi/\tau$. Амплитудный спектр имеет лепестковый характер и ширина лепестков равна $2\pi/\tau$. При удлинении импульса ширина лепестков сокращается, а начальное значение $S(0)$ возрастает. При укорочении импульса все происходит наоборот. Значение спектральной функции на нулевой частоте равно площади импульса - $A\tau$. Спектральная функция является вещественной, поэтому фазовый спектр принимает

моделировании и исследовании различных устройств и систем обработки сигналов.

По определению дельта-функция или функция Дирака $\delta(t - \tau)$ для любого действительного параметра τ равна нулю при $t \neq \tau$, неограниченна при $t = \tau$ и представляет собой единичный по площади импульс, расположенный на временной оси в точке τ :

$$\delta(t - \tau) = \begin{cases} \infty & \text{при } t = \tau \\ 0 & \text{при } t \neq \tau \end{cases}$$

так, что интеграл от этой функции равен

$$\int_a^b \delta(t - \tau) dt = \begin{cases} 1 & \text{при } a < \tau < b, \\ 1/2 & \text{при } \tau = a \text{ или } \tau = b, \\ 0 & \text{при } \tau < a, \tau > b. \end{cases}$$

Отметим, что дельта-функцию можно получить из рассмотренного выше одиночного прямоугольного импульса как предел при устремлении длительности его к нулю и сохранении площади импульса $A\tau=1$. Как следует из (19) амплитудный спектр дельта-функции в этом случае представляет собой постоянную величину, $|S(\omega)|=1$, а фазовый спектр $\varphi(\omega)=0$ на всей частотной оси. При смещении дельта функции во времени от начала координат на величину Δ , в соответствии с (18) его амплитудный спектр не меняется, а фазовый приобретает линейный сдвиг: $\varphi(\omega) = -\omega\Delta$.

Дельта-функция обладает фильтрующим свойством. Суть его заключается в том, что если дельта-функция $\delta(t - \tau)$ входит под интеграл какой-либо функции в качестве множителя, то результат интегрирования равен значению подынтегральной функции в точке $t = \tau$ расположения дельта-импульса, т.е.:

$$\int_a^b x(t) \delta(t - \tau) dt = \begin{cases} x(\tau) & \text{при } a < \tau < b, \\ (1/2)x(\tau) & \text{при } \tau = a \text{ или } \tau = b, \\ 0 & \text{при } \tau < a, \tau > b, \end{cases} \quad (20)$$

Воспользовавшись этим свойством легко получить спектр дельта-функции с помощью прямого преобразования Фурье:

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - \tau) \exp(-j\omega t) dt = \exp(-j\omega\tau) \quad (21)$$

Из (21) прямо следует, что при $\tau = 0$ спектр дельта-функции равномерный на всех частотах с интенсивностью, равной единице и $\varphi(\omega) = 0$. При $\tau \neq 0$ интенсивность спектра не меняется, а фазовый спектр становится линейно зависимым от частоты $\varphi(\omega) = -\omega\tau$. Этот вывод полностью совпадает с приведенным выше результатом анализа преобразования спектра одиночного импульса при его длительности, стремящейся к нулю. Пример спектра дельта-функции при $\tau = 2$ приведен на рисунке 14.

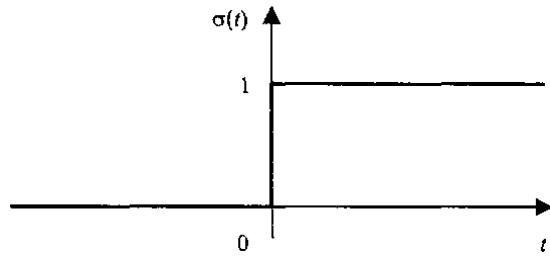


Рисунок 15 - Функция единичного скачка

Прямое преобразование Фурье единичного скачка приводит к следующему выражению спектра этой функции:

$$S(\omega) = \frac{1}{2\pi j\omega} + \frac{1}{2}d(\omega) \quad (22)$$

Второй член суммы в (22), соответствующий нулевой частоте, описывает постоянное смещение функции Хевисайда вверх; без него получилась бы нечётная функция единичного скачка, а в ее спектре не было бы составляющей $0.5d(\omega)$.

Функция единичного скачка используется при создании математических моделей сигналов конечной длительности. При умножении любой произвольной функции на прямоугольный импульс, сформированный из двух последовательных функций единичного скачка $s(t) = u(t) - u(t - T)$, из нее вырезается участок на интервале $0-T$, и обнуляются значения функции за пределами этого интервала. Простейшим примером является формирование прямоугольного импульса с амплитудой A и длительностью T : $s(t) = A[u(t) - u(t - T)]$. Вообще, любую кусочно-заданную зависимость можно записать в виде единого математического выражения с помощью функции единичного скачка.

В заключении анализа моделей аperiodических сигналов отметим, что если нас не интересует поведение такого сигнала за пределами области его задания $[0, T]$, то сам сигнал может восприниматься как периодический с периодом, равным T . При этом значение $f = 1/T$ принимается за фундаментальную частоту периодических колебаний f_0 , и для частотной модели сигнала может применяться разложение в ряды Фурье по области его задания. Это способ широко применяется при анализе конечных отрезков (выборок) сигналов не только аperiodических, но и любых других сигналов, включая случайные, и реализуется, в основном, с помощью быстрого преобразования Фурье (БПФ).

нахождения величины сигнала в определенном интервале значений, плотность этого распределения и его моменты, а также спектральное распределение мощности случайного сигнала.

Практическая часть занятия

Содержание работы

1. Составление в языковой среде *MathCad* программы для моделирования временной диаграммы сигнала для нескольких типов радиосигналов.
2. Построение графиков радиосигналов с помощью разработанной программы.
3. Анализ получаемых результатов.

Программа подготовки к работе

1. Изучить теоретическую часть материала лабораторной работы.
2. Уяснить цель и порядок проведения лабораторной работы.
3. Ознакомиться с соотношениями, описывающими радиосигналы различных типов. Провести анализ входящих в них параметров.
4. Составить программу моделирования временной развертки требуемых типов радиосигналов.
5. Подготовиться к ответам на контрольные вопросы.
6. Подготовить бланк отчета по работе.

Описание порядка работы

Работа выполняется в следующей последовательности.

1. Составить в языковой среде *Mathcad 15* программу для моделирования временной диаграммы сигнала.

В языковой среде *MathCad 15* с использованием соотношений, приведенных в разделе «Теоретическая часть» составить программу для моделирования временных разверток следующих типов радиосигналов:

для следующих типов радиосигналов:

- гармонического;
- амплитудно-модулированного сигнала;
- частотно-модулированного сигнала;
- фазомодулированного сигнала;
- импульсного видеосигнала;
- информационной последовательности импульсных сигналов;
- последовательности импульсных фазомодулированных сигналов;
- последовательности импульсных частотно-модулированных сигналов;
- последовательности импульсных амплитудно-модулированных сигналов.

10. Какой функцией описывается спектр непериодического сигнала?
11. Какой функцией описывается тестовый сигнал?
12. В чем выражается фильтрующее свойство дельта-функции?
13. Какими функциями определяются квадратурные составляющие единичного спектра?
14. Каков физический смысл функции единичного скачка?
15. Какие радиотехнические сигналы описываются случайными функциями?
16. Что называется случайным процессом?

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

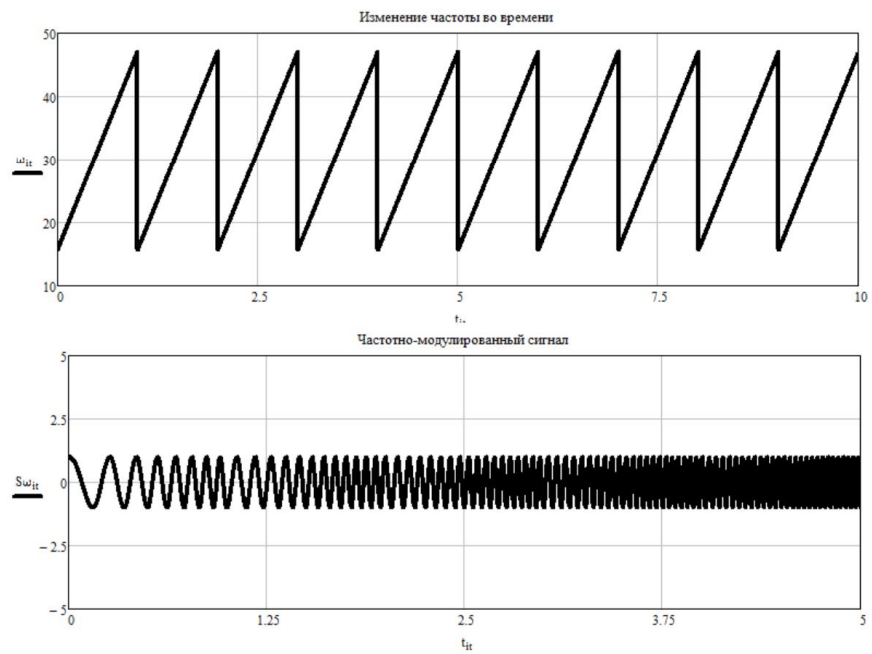
1. Биккенин Р.Р., Чеснокова М.Н. Теория электрической связи. М.: Академия, 2010.
2. Акулиничев Ю.П. Теория электрической связи. СПб.: Лань, 2010.
3. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Теория вероятностей и ее инженерных приложения. М.: Академия, 2003.
4. Габриэльян Д.Д., Шевчук П.С. Теория информации. Ростов н/Д: РТИСТ ЮРГУЭС, 2010.

Формирование частотно-модулированного сигнала

$A_0 := 1$ $\omega_0 := 10 \cdot \pi$ $\Omega_1 := 0.01 \cdot \pi$ $\tau := 1000$ $N\tau := \text{ceil}\left(\frac{N\tau}{\tau}\right)$ $\varphi_0 := 0$

$\Omega m := \begin{cases} it \leftarrow 0 \\ \text{for } it \in 0..N\tau \\ \text{for } j\tau \in 0..\tau \\ \left| \begin{array}{l} \omega_{it} \leftarrow \omega_0 + \Omega_1 \cdot \left(j\tau - \frac{\tau}{2}\right) \\ it \leftarrow it + 1 \end{array} \right. \\ \omega \end{cases}$

$\omega_{it} := \Omega m_{it}$ $S\omega_{it} := A_0 \cdot \cos(\omega_{it} \cdot t_{it} + \varphi_0)$



Формирование импульсного сигнала

$$N_{\tau} := \text{ceil}\left(\frac{Nt}{\tau}\right) \quad i_{\tau} := 0..N_{\tau} - 1 \quad a := \text{runif}(N_{\tau}, -1, 1) \quad A_{i_{\tau}} := \begin{cases} 1 & \text{if } a_{i_{\tau}} \geq 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$SI := \begin{cases} \text{for } it \in 0..Nt - 1 \\ n \leftarrow \text{ceil}\left(\frac{it}{\tau}\right) \\ s_{it} \leftarrow \begin{cases} A_n & \text{if } n < N_{\tau} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \end{cases}$$

$$s$$

$$\tau := 500 \quad SF_{it} := SI_{it} \cdot S0_{it}$$
